
UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01180531 4
QA
689
B65
UNIV. OF
TORONTO
LIBRARY



La Science absolue de l'Espace

par

Bolyai de Bolya, János

[Jean Bolyai [de Bolya]]

(Extrait des Mém. de la Soc. des Sci. de Bordeaux, vol 5, 1867)

EXPLICATION DES SIGNES.

$\overline{a\,b}$	l'ensemble de ***tous*** les points situés en ligne droite avec les points a et b.
$\overrightarrow{a\,b}$	celle des moitiés de la droite $\overline{a\,b}$ qui commence au point a et qui comprend le point b.
$\overline{a\,b\,c}$	l'ensemble de ***tous*** les points situés dans le même plan que les trois points (non en ligne droite) a, b, c.
$\overrightarrow{a\,b\,c}$	celle des moitiés du plan $\overline{a\,b\,c}$ qui part de la droite $\overline{a\,b}$ et qui comprend le point c.
$a\,b\,c$	*la plus petite* des parties dans lesquelles $\overline{a\,b\,c}$ est partagé par les droites $\overrightarrow{b\,a}$, $\overrightarrow{b\,c}$, ou l'*angle* dont les côtés sont $\overrightarrow{b\,a}$, $\overrightarrow{b\,c}$.
$a\,b\,c\,d$	(le point d étant situé à l'intérieur de $a\,b\,c$, et les droites $\overrightarrow{b\,a}$, $\overrightarrow{c\,d}$ ne se coupant pas) la portion de $a\,b\,c$ comprise entre $\overrightarrow{b\,a}$, $\overrightarrow{b\,c}$, $\overrightarrow{c\,d}$; tandis que $b\,a\,c\,d$ désignera la portion de $\overline{a\,b\,c}$ comprise entre $\overline{a\,b}$ et $\overline{c\,d}$.
∟	signe de la perpendicularité.
‖‖	signe du parallélisme.
∧	un angle.
R	un angle droit.
≡	indique que deux quantités sont superposables.
$ab \triangleq cd$	$cab = acd$.
$x \sim a$	x converge vers la limite a.
△	triangle.
□	carré.
$\mathrm{C}r$	la circonférence du cercle de rayon r.
$\odot r$	l'aire du cercle de rayon r

LA

SCIENCE ABSOLUE DE L'ESPACE

indépendante de la vérité ou de la fausseté de l'Axiôme XI d'Euclide
(que l'on ne pourra jamais établir *a priori*);

SUIVIE DE LA QUADRATURE GÉOMÉTRIQUE DU CERCLE, DANS LE CAS DE LA FAUSSETÉ DE L'AXIÔME XI,

PAR JEAN BOLYAI,

Capitaine au Corps du Génie dans l'armée autrichienne.

---

§ 1.

Si la droite $\overrightarrow{am}$ n'est pas coupée par la droite $\overrightarrow{bn}$, située dans le même plan, mais qu'elle soit coupée par toute autre droite $\overrightarrow{bp}$, comprise dans l'angle abn, on dira que $\overrightarrow{bn}$ est *parallèle* à $\overrightarrow{am}$, c'est à dire qu'on aura $bn \parallel\!| \ am$.

Il est facile de voir qu'*il existe une telle droite* $\overrightarrow{bn}$, *et une seule,* passant par un point quelconque b (pris hors de $\overline{am}$), et que la somme des angles bam, abn ne peut surpasser $2\,R$. Car, en faisant mouvoir bc autour de b jusqu'à ce que l'on ait $bam + abc = 2\,R$, il y aura un instant où $\overrightarrow{bc}$ *commencera* à ne plus couper $\overrightarrow{am}$, et c'est alors qu'on aura $bc \parallel\!| \ am$.

Il est clair, en même temps, que $bn \parallel\!| \ em$, quel que soit le point e pris sur $\overline{am}$.

Si, tandis que le point c s'éloigne à l'infini sur $\overrightarrow{am}$, on prend toujours $cd = cb$, on aura constamment $cbd = cdb < nbc$. Or $nbc \rightarrow 0$; donc aussi $adb \rightarrow 0$.

§ 2.



Si $bn \parallel\!| am$, on a aussi $cn \parallel\!| am$. Soit, en effet, d un point quelconque de $macn$. Si c est sur $\overrightarrow{bn}$, $\overrightarrow{bd}$ coupera $\overrightarrow{am}$, puisque $bn \parallel\!| am$. Donc cd coupera aussi $\overrightarrow{am}$. Si c est situé sur $\overrightarrow{bp}$, soit $bq \parallel\!| cd$; bq tombera à l'intérieur de abn (§ 1), et coupera par conséquent $\overrightarrow{am}$; donc $\overrightarrow{cd}$ coupera aussi $\overrightarrow{am}$. Donc toute droite $\overrightarrow{cd}$ (dans acn) coupe, dans l'un et l'autre cas, la droite $\overrightarrow{am}$, sans que $\overrightarrow{cn}$ elle-même coupe $\overrightarrow{am}$. Donc on a toujours $cn \parallel\!| am$.

§ 3.

Si br et cs sont l'une et l'autre $\parallel\!| am$, et que c ne soit pas situé sur $\overline{br}$, alors $\overrightarrow{br}$ et $\overrightarrow{cs}$ ne se couperont pas. Car si $\overrightarrow{br}$ et $\overrightarrow{cs}$ avaient un point commun d, alors (§ 2) dr et ds seraient l'une et l'autre $\parallel\!| am$, $\overrightarrow{dr}$ (§ 1) coïnciderait avec $\overrightarrow{ds}$, et c tomberait sur $\overline{br}$, ce qui est contre l'hypothèse.

§ 4.

Si $man > mab$, il y aura, pour tout point b de $\overrightarrow{ab}$, un point c de $\overrightarrow{am}$, tel qu'on aura $bcm = nam$. On peut, en effet (§ 1), mener bd de façon que $bdm > nam$, et en faisant $mdp = man$, b sera compris dans $nadp$. Si donc on transporte nam le long de am, jusqu'à ce que $\overrightarrow{an}$ arrive sur $\overrightarrow{dp}$, il faudra que $\overrightarrow{an}$ ait passé par b, et que l'on ait eu quelque part $bcm = nam$.



§ 5.

Si $bn \parallel\!| am$, il y a sur $\overline{am}$ un point f tel que $fm \triangleq bn$. En effet, on peut faire en sorte que l'on ait (§ 1) $bcm > cbn$, et,



si $ce = cb$, il en résultera $ec \triangleq bc$, d'où $bem < ebn$. Faisons mouvoir le point p sur ec. L'angle bpm, pour p voisin de e, commencera par être $<$ l'angle pbn correspondant, et pour p voisin de c, il finira par être $> pbn$. Or, l'angle bpm va en croissant d'une manière continue depuis bem jusqu'à bcm, puisque (§ 4) il n'existe aucun angle $> bem$ et $< bcm$, auquel bpm ne puisse devenir égal. Pareillement pbn décroît d'une manière continue depuis ebn jusqu'à cbn. Il existe donc sur ec un point f tel que $bfm = fbn$.

§ 6.

Si $bn \parallel\!| am$, et que e soit un point quelconque de $\overline{am}$, g un point quelconque de $\overline{bn}$, on aura alors $gn \parallel\!| em$ et $em \parallel\!| gn$.

Car on a (§ 1) $bn \parallel\!| em$, d'où (§ 2) $gn \parallel\!| em$. Si l'on fait maintenant $fm \triangleq bn$ (§ 5), alors $mfbn \equiv nbfm$, et par suite, puisque $bn \parallel\!| fm$, on a aussi $fm \parallel\!| bn$, et, d'après ce qui précède, $em \parallel\!| gn$.

§ 7.

Si bn et cp sont l'une et l'autre $\parallel\!| am$, et que c ne soit pas situé sur $\overline{bn}$, on aura aussi $bn \parallel\!| cp$.

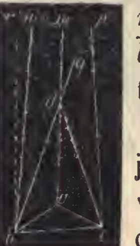


En effet, $\overrightarrow{bn}$ et $\overrightarrow{cp}$ ne se coupent pas (§ 3). D'ailleurs, am, bn et cp sont ou ne sont pas dans un même plan, et, dans le premier cas, am est ou n'est pas à l'intérieur de $bncp$.

1° Si am, bn, cp sont dans un même plan, et que am tombe à l'intérieur de $bncp$, alors toute droite $\overrightarrow{bq}$ menée à l'intérieur de nbc, coupera $\overrightarrow{am}$

quelque part en d, puisque $bn \;|||\; am$. De plus, à cause de $dm \;|||\; cp$ (§ 6), il est clair que $\overrightarrow{dq}$ coupera $\overrightarrow{cp}$; donc on a $bn \;|||\; cp$.

2° Si bn et cp sont du même côté de am, l'une d'elles, cp par exemple, sera comprise *entre* les deux autres droites $\overline{bn}$, $\overline{am}$. Or, toute droite $\overrightarrow{bq}$, intérieure à nba, rencontre $\overrightarrow{am}$; par suite, elle rencontre aussi cp. Donc $bn \;|||\; cp$.



3° Si les plans mab, mac font entre eux un angle, alors cbn et abn ne pourront avoir de commun que la ligne $\overline{bn}$, tandis que $\overline{am}$ (dans abn) n'aura rien de commun avec $\overrightarrow{bn}$, et par suite aussi nbc n'aura rien de commun avec $\overline{am}$. Or, tout plan $\overline{bcd}$, mené par la droite $\overrightarrow{bd}$ (situé dans nba), rencontrera $\overrightarrow{am}$, puisque $\overrightarrow{bq}$ rencontre $\overrightarrow{am}$ (à cause de $bn \;|||\; am$). En faisant donc mouvoir $\overrightarrow{bcd}$ autour de bc, jusqu'à ce que ce plan *commence* à quitter $\overrightarrow{am}$, $\overrightarrow{bcd}$ viendra alors coïncider avec $\overrightarrow{bcn}$. Par la même raison, ce même plan viendra coïncider avec $\overrightarrow{bcp}$; donc bn est dans le plan bcp.

Si, de plus, $br \;|||\; cp$, alors (am étant aussi $|||\; cp$) br sera, par la même raison, dans le plan bam, et aussi (puisque $br \;|||\; cp$) dans le plan bcp. Donc $\overline{br}$, étant commune aux deux plans mab, pcb, n'est autre chose que la ligne $\overline{bn}$; donc $bn \;|||\; cp$ [*].

Si donc $cp \;|||\; am$, et que b soit extérieur à $\overline{cam}$, alors l'intersection $\overrightarrow{bn}$ des plans bam, cap est $|||$ à la fois à am et à cp.

§ 8.



Si bn est $|||$ et ≏ cp (ou plus brièvement, si $bn \;|||$ ≏ cp), et que am (dans $nbcp$) soit ⊥ sur le milieu de bc, alors $bn \;|||\; am$.

En effet, si $\overrightarrow{bn}$ rencontrait $\overrightarrow{am}$, $\overrightarrow{cp}$ rencontrerait aussi $\overrightarrow{am}$ au même point (à cause de $mabn \equiv$

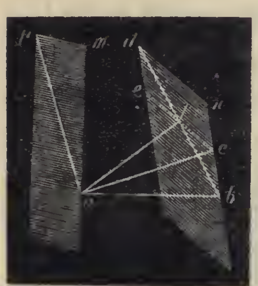
[*] En plaçant ce 3e cas avant les deux précédents, ceux-ci pourraient se démontrer avec plus de brièveté et d'élégance, comme le 2e cas du § 10.
(Note de l'Auteur.)

$macp$, et ce point serait commun aux lignes $\overrightarrow{bn}$, $\overrightarrow{cp}$ elles-mêmes, tandis qu'au contraire $bn \parallel\!| \; cp$. D'autre part, toute droite $\overrightarrow{bq}$, intérieure à cbn, rencontre $\overrightarrow{cp}$; elle rencontre donc aussi $\overrightarrow{am}$. Par conséquent, $bn \parallel\!| \; am$.

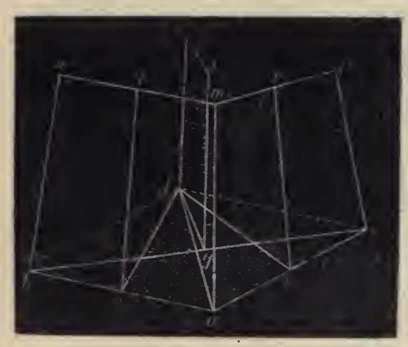
§ 9.

Si $bn \parallel\!| \; am$, $map \perp mab$, et que l'angle dièdre $dnba$ des plans nbd, nba (prolongés du même côté de $mabn$ où se trouve map) soit $< R$; alors map et nbd se couperont.

Soit, en effet, $bam = R$, $ac \perp bn$ (que c coïncide ou non avec b), et $ce \perp bn$ (dans nbd); on aura (par hypothèse) $ace < R$, et af ($\perp ce$) tombera dans ace. Soit $\overrightarrow{ap}$ l'intersection des plans $\overrightarrow{abf}$, $\overrightarrow{amp}$ (qui ont le point a commun) : on aura $bap = bam = R$ (puisque $bam \perp map$). Si enfin l'on fait mouvoir $\overrightarrow{abf}$ autour des points fixes a et b, jusqu'à ce qu'il s'applique sur $\overrightarrow{abm}$, $\overrightarrow{ap}$ tombera sur $\overrightarrow{am}$, et puisque $ac \perp bn$ et $af < ac$, il est clair que af aura son extrémité entre $\overrightarrow{bn}$ et $\overrightarrow{am}$, et que par suite bf tombera à l'intérieur de abn. Or, *dans cette position*, $\overrightarrow{bf}$ rencontre $\overrightarrow{ap}$ (puisque $bn \parallel\!| \; am$); donc $\overrightarrow{ap}$ et $\overrightarrow{bf}$ se rencontrent aussi *dans la position primitive*, et le point de rencontre est commun à $\overrightarrow{map}$ et à $\overrightarrow{nbd}$. Donc $\overrightarrow{map}$ et $\overrightarrow{nbd}$ se coupent.



On en conclut facilement que $\overrightarrow{map}$ et $\overrightarrow{nbd}$ se coupent toutes les fois que la somme des angles dièdres qu'ils forment avec mab est $< 2R$.



§ 10.

Si bn et cp sont l'une et l'autre $\parallel\!| \; \triangleq am$, on aura aussi $bn \parallel\!| \; \triangleq cp$.

En effet, ou les plans mab, mac font entre eux un angle, ou ils forment un même plan.

1° Si le premier cas a lieu, menons $\overrightarrow{qdf} \perp$ sur le milieu de

ab. Alors dq sera $\perp$ ab, et par suite $dq \parallel\!| \; am$ (§ 8). De même, si $\overrightarrow{ers}$ est $\perp$ sur le milieu de ac, on aura $er \parallel\!| \; am$, d'où $dq \parallel\!| \; er$ (§ 7). On en conclut aisément (d'après le § 9) que $\overrightarrow{qdf}$ et $\overrightarrow{ers}$ se rencontrent, et que leur intersection $\overrightarrow{fs}$ est $\parallel\!|$ dq (§ 7); de plus, à cause de $bn \parallel\!| \; dq$, on a aussi $fs \parallel\!| \; bn$. On a en outre (pour tout point f de $\overline{fs}$) $fb = fa = fc$, et $\overline{fs}$ est située dans le plan $\overrightarrow{tgf}$ $\perp$ sur le milieu de bc. Or on a (§ 7), à cause de $fs \parallel\!| \; bn$, $gt \parallel\!| \; bn$. On démontrera de même que $gt \parallel\!| \; cp$. Mais gt $\perp$ sur le milieu de bc; donc $tgbn \equiv tgcp$ (§ 1), et $bn \parallel\!| \triangleq cp$.

2° Si bn, am et cp sont dans un même plan, soit la droite fs, *extérieure* à ce plan, et $\parallel\!| \triangleq am$. Alors, d'après ce qu'on vient de voir, $fs \parallel\!| \triangleq$ à chacune des droites bn, cp, et par suite on a aussi $bn \parallel\!| \triangleq cp$.

§ 11.

Considérons l'ensemble formé par le point a et par *tous* les points tels que, pour un quelconque d'entre eux b, lorsque $bn \parallel\!| \; am$, on ait aussi $bn \triangleq am$, et désignons cet ensemble par F [*]; et soit L [**] l'intersection de F avec un plan quelconque mené par la droite am. Sur toute droite $\parallel\!| \; am$, F a un point, et un seul; et il est évident que L est divisée par am en deux parties susceptibles de coïncider. Nous appellerons $\overrightarrow{am}$ l'*axe de L*. Il est clair encore que, dans un plan quelconque passant par la droite am, il y a, pour l'*axe* $\overrightarrow{am}$, une seule ligne L. Toute ligne L, ainsi définie, s'appellera le L de $\overrightarrow{am}$ (dans le plan, bien entendu, que l'on considère). Il est évident que, par la révolution de L autour de la droite am, on engendrera le F dont $\overrightarrow{am}$ est dite l'*axe*, et qui est, réciproquement, *le F de l'axe* $\overrightarrow{am}$.

§ 12.

Soit b un point quelconque du L de $\overrightarrow{am}$, et $bn \parallel\!| \triangleq am$ (§ 11). Alors le L de $\overrightarrow{am}$ et le L de $\overrightarrow{bn}$ *coïncideront*.

---

[*] *Sphère-limite* de Lobatschewsky (*H.*).
[**] *Cercle-limite* de Lobatschewsky (*H.*).

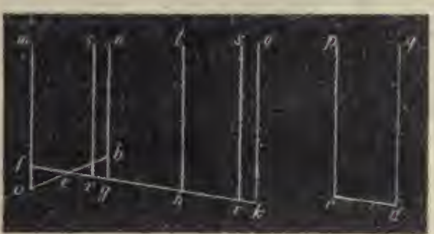
Soit, en effet, L' le L de $\overrightarrow{bn}$; soit c un point quelconque de L', et $cp \parallel\!| \triangleq bn$ (§ 11). A cause de $bn \parallel\!| \triangleq am$, on aura aussi $cp \parallel\!| \triangleq am$ (§ 10); par conséquent c sera situé sur L. Et si c est un point quelconque de L, et que $cp \parallel\!| \triangleq am$, alors aussi $cp \parallel\!| \triangleq bn$ (§ 10); donc c est également situé sur L' (§ 11). Donc L et L' sont identiques, et toute droite $\overrightarrow{bn}$ ($\parallel\!|\ am$) est un nouvel axe de L, et est $\triangleq$ par rapport à tous les axes de L.

La même propriété se démontrerait de la même manière pour la surface F.

§ 13.

Si l'on a $bn \parallel\!| am$, $cp \parallel\!| dq$, et $bam + abn = 2\,R$, alors on aura aussi $dcp + cdq = 2\,R$.

Soient, en effet, $ea = eb$, et $efm = dcp$ (§ 4). A cause de $bam + abn = 2\,R = abn + abg$, on aura $ebg = eaf$. Si donc on a encore $bg = af$, le $\Delta\, ebg \equiv \Delta\, eaf$, $beg = aef$, et g tombera sur $\overrightarrow{fe}$. On a, de plus, $gfm + fgn = 2\,R$ (puisque $egb = efa$).



D'ailleurs $gn \parallel\!| fm$ (§ 6); donc, si $mfrs \equiv pcdq$, alors $rs \parallel\!| gn$ (§ 7), et r tombe soit en dedans, soit en dehors de fg (si l'on n'a pas $cd = fg$, auquel cas la proposition serait évidente).

1° Dans le premier cas, frs n'est pas plus grand que $2\,R - rfm = fgn$, puisque $rs \parallel\!| fm$. Mais comme $rs \parallel\!| gn$, frs n'est pas $< fgn$. Donc $frs = fgn$, et $rfm + frs = gfm + fgn = 2\,R$. On a donc aussi $dcp + cdq = 2\,R$.

2° Si r tombe en dehors de fg, alors $ngr = mfr$. Soit $mfgn \equiv nghl \equiv lhko$, et ainsi de suite, jusqu'à ce que fk devienne $= fr$ ou commence à surpasser fr. On a ici $ko \parallel\!| hl \parallel\!| fm$ (§ 7). Si k tombe en r, alors ko tombe sur rs (§ 1), et par suite $rfm + frs = kfm + fko = kfm + fgn = 2\,R$. Mais si r tombe à l'intérieur de hk, alors (d'après 1°) on a $rhl + krs = 2\,R = rfm + frs = dcp + cdq$.

§ 14.

Si l'on a $bn \parallel\!| \, am$, $cp \parallel\!| \, dq$ et $bam + abn < 2R$, on aura aussi $dcp + cdq < 2R$.

Car, si $dcp + cdq$ n'était pas $< 2R$, cette somme (d'après le § 1) serait $= 2R$. Alors on aurait aussi (§ 13) $bam + abn = 2R$, ce qui est contre l'hypothèse.

§ 15.

En considérant ce que nous avons établi dans les §§ 13 et 14, *nous désignerons par* Σ *le système de géométrie qui repose sur l'hypothèse de la vérité de l'axiôme XI d'Euclide, et par* S *le système fondé sur l'hypothèse contraire.*

Tous les résultats que nous énoncerons, sans désigner expressément si c'est dans le système Σ *ou dans le système* S *qu'ils ont lieu, devront être considérés comme énoncés d'une manière absolue, c'est-à-dire qu'ils seront donnés comme vrais, soit qu'on se place dans le système* Σ*, soit qu'on se place dans le système* S.

§ 16.

Si am est l'axe d'une ligne L, cette ligne L, dans le système Σ, sera une droite $\perp am$.



Soit, en effet, bn l'axe en un point quelconque b de L; on aura, dans Σ, $bam + abn = 2bam = 2R$, d'où $bam = R$. Et si c est un point quelconque de $\overline{ab}$, et que l'on ait $cp \parallel\!| \, am$, on aura (§ 13) $cp \triangleq am$, et par conséquent c sera sur L (§ 11).

Mais, dans S, il n'existe nulle part sur L ou sur F trois points en ligne droite. — En effet, quelqu'un des axes am, bn, cp (am, par exemple) tombe entre les deux autres, et alors (§ 14) bam et cam sont l'un et l'autre $< R$.

§ 17.

Dans S, L est encore une ligne, et F une surface. Car (§ 11)

tout plan mené perpendiculairement à l'axe $\overrightarrow{am}$ par un point quelconque de F, coupe F suivant une circonférence de cercle, dont le plan (§ 14) n'est perpendiculaire à aucun autre axe $\overrightarrow{bn}$. Si l'on fait tourner F autour de bn, un point quelconque de F (§ 12) restera sur F, et la section de F par un plan non-perpendiculaire à $\overrightarrow{bn}$ décrira une surface. Or, quels que soient les points a, b pris sur F, F pourra (§ 12) coïncider *avec lui-même,* de manière que a tombe en b. Donc F est une *surface uniforme*.

Il résulte de là (§§ 11 et 12) que L est une *ligne uniforme* [*],

§ 18.

L'intersection de F avec un plan quelconque, mené par un point a de F obliquement à l'axe am, est, dans le système S, une circonférence de cercle.



Soient, en effet, a, b, c trois points de cette section, et bn, cp des axes. $ambn$ et $amcp$ feront un angle, sans quoi le plan déterminé par a, b, c (§ 16) comprendrait am, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc les plans perpendiculaires sur les milieux des droites ab, ac se coupent (§ 10) suivant un certain axe $\overrightarrow{fs}$ de F, et l'on a $fb = fa = fc$. Soit $ah \perp fs$, et faisons tourner fah autour de fs; a décrira une circonférence de rayon ha, passant en b et en c, et située à la fois dans F et dans $\overline{abc}$; de plus, F et abc n'ont rien de commun que la $\bigcirc ha$ (§ 16).

Il est encore évident qu'en faisant tourner la portion fa de ligne L (comme rayon) dans F autour de a, son extrémité décrira la $\bigcirc ha$.

§ 19.

La perpendiculaire bt à l'axe bn de L (menée dans le plan de L) est, dans le système S, la tangente à la ligne L.

---

[*] Il n'est pas nécessaire de restreindre la démonstration au système S; on peut établir facilement qu'elle est vraie d'une manière absolue pour S et pour Σ. (*Note de l'Auteur.*)

En effet, L n'a de commun avec $\overrightarrow{bt}$ que le point b (§ 14). Mais, si bq est situé dans le plan tbn, alors le centre de la section faite dans le F de $\overrightarrow{bn}$ par le plan mené suivant bq perpendiculairement à tbn (§ 18), est évidemment placé sur $\overrightarrow{bq}$; et si bq est un diamètre, il est clair que $\overrightarrow{bq}$ coupera en q le L de $\overrightarrow{bn}$.

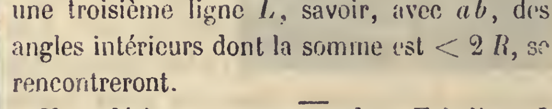


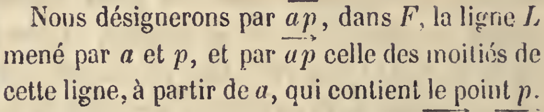
§ 20.

Deux points quelconques de F déterminent une ligne L (§§ 11 et 18); et puisque (§§ 16 et 19) L est perpendiculaire à tous ses axes, tout angle de lignes L dans F est égal à l'angle des plans menés par ses côtés perpendiculairement à F.

§ 21.

Deux lignes L, $\overrightarrow{ap}$ et $\overrightarrow{bd}$, dans la même surface F, faisant avec une troisième ligne L, savoir, avec ab, des angles intérieurs dont la somme est $< 2R$, se rencontreront.





Nous désignerons par $\overline{ap}$, dans F, la ligne L mené par a et p, et par $\overrightarrow{ap}$ celle des moitiés de cette ligne, à partir de a, qui contient le point p.

En effet, si am, bn sont des axes de F, les plans $\overrightarrow{amp}$, $\overrightarrow{bnd}$ se couperont (§ 9), et F rencontrera leur intersection (§§ 7 et 11). Donc $\overrightarrow{ap}$ et $\overrightarrow{bd}$ se rencontreront.

Il résulte de là que l'axiôme XI et toutes les conséquences que l'on en déduit en géométrie et en trigonométrie (plane), sont vrais d'une manière absolue dans F, les lignes L jouant le rôle de lignes droites. Par conséquent, les fonctions trigonométriques seront prises ici dans le même sens que dans le système Σ; et la circonférence du cercle tracé dans F et ayant pour rayon une portion de ligne L égale à r, aura pour longueur $2\pi r$; et de même $\odot r$ (dans F) sera $= \pi r^2$ (π désignant $\frac{1}{2} \bigcirc 1$ dans F, c'est-à-dire le nombre connu 3, 1415926....).

§ 22.

Soit $\overline{ab}$ la ligne L de $\overrightarrow{am}$, et c un point de $\overrightarrow{am}$. Imaginons que l'angle cab (formé par la droite $\overrightarrow{am}$ et la ligne L désignée par $\overrightarrow{ab}$) soit transporté d'abord le long de $\overrightarrow{ab}$, puis le long de $\overrightarrow{ba}$, et de part et d'autre jusqu'à l'infini. La trajectoire $\overline{cd}$ du point c sera la ligne L de $\overrightarrow{cm}$.



En effet, si l'on désigne cette dernière par L', soient d un point quelconque de $\overline{cd}$, $dn \parallel\!| \; cm$, et b le point de L situé sur $\overline{dn}$. On aura $bn \triangleq am$ et $ac = bd$, et par suite $dn \triangleq cm$; donc d est sur L'. D'ailleurs, si d est sur L' et si $dn \parallel\!| \; cm$, et que b soit le point de L commun avec $\overline{dn}$, on aura $am \triangleq bm$ et $cm \triangleq dn$, d'où il résulte que $bd = ac$, et que d tombera sur la trajectoire du point c; L' sera donc identique avec $\overline{cd}$.

Nous représenterons la relation d'une telle ligne L' avec L par la notation $L' \parallel L$.

§ 23.

Si la ligne L représentée par cdf est $\parallel abe$ (§ 22); si, de plus, $ab = be$, et que $\overrightarrow{am}$, $\overrightarrow{bn}$, $\overrightarrow{ep}$ soient des axes, on aura évidemment $cd = df$. Si a, b, e sont trois points quelconques de $\overline{ab}$, et que l'on ait $ab = n.cd$, on aura aussi $ae = n.cf$, et par conséquent (ce qui s'étend évidemment au cas de ab, ae, dc incommensurables), $ab : cd = ae : cf$. Le rapport $ab : cd$ est donc INDÉPENDANT DE ab, ET COMPLÈTEMENT DÉTERMINÉ AU MOYEN DE ac Nous désignerons la valeur de ce rapport $ab : cd$ par la lettre capitale (telle que X) qui correspondra à la lettre minuscule (telle que x) par laquelle nous représenterons ac.

§ 24

Quels que soient x et y, on a $Y = X^{\frac{y}{x}}$ (§ 23). En effet, ou l'une des quantités x, y est multiple de l'autre (par exemple, y est multiple de x), ou elle ne l'est pas.

Si $y = nx$, soit $x = ac = cg = gh = \ldots$, jusqu'à ce que l'on ait $ah = y$. Soit, de plus, $cd \parallel gk \parallel hl$. On aura (§ 23) $X = ab : cd = cd : gk = gk : hl$, et par conséquent

$$\frac{ab}{hl} = \left(\frac{ab}{cd}\right)^n,$$

ou

$$Y = X^n = X^{\frac{y}{x}}$$

Si x, y sont des multiples de i, $x = mi$, $y = ni$, on aura, d'après ce qu'on vient de voir, $X = I^m$, $Y = I^n$, et par conséquent

$$Y = X^{\frac{n}{m}} = X^{\frac{y}{x}}$$

Cette conclusion s'étend aisément au cas où x et y sont incommensurables.

Si l'on a $q = y - x$, il en résultera évidemment $Q = Y : X$.

Il est clair que, dans le système Σ, on a, pour toute valeur de x, $X = 1$. Dans le système S, au contraire, on a $X > 1$, et pour des valeurs quelconques de ab et de abe, il existe une ligne $cdf \parallel abe$, telle que $cdf = ab$, d'où il résulte $ambn \equiv amep$, quoique la première de ces deux figures soit un multiple quelconque de la seconde : résultat singulier, mais qui ne prouve évidemment pas l'absurdité du système S.

§ 25.

Dans tout triangle rectiligne, les circonférences de rayons égaux aux côtés sont entre elles comme les sinus des angles opposés.



Soient, en effet, $abc = R$, et $am \perp bac$, et soient bn et $cp \parallel\!\parallel\!\parallel am$. On aura $cab \perp ambn$, et par suite (à cause de $cb \perp ba$), $cb \perp ambn$; par conséquent, $cpbn \perp ambn$. Supposons que le F de $\overrightarrow{cp}$ coupe les droites $\overline{bn}$, $\overline{am}$ respectivement en d, e, et les bandes $cpbn$, $cpam$, $bnam$ suivant les lignes L, cd, ce, de. Alors (§ 20) $\wedge cde$ sera égal à l'angle de ndc, nde, et par suite $= R$; et l'on aura, par la même raison, $ced = cab$. Or (§ 21), dans

le Δ *ced*, formé par des lignes L (en supposant toujours ici le rayon $= 1$), on a

$$ec : dc = 1 : \sin dec = 1 : \sin cab.$$

On a aussi (§ 21)

$$ec : dc = \bigcirc ec : \bigcirc dc \text{ (dans } F) = \bigcirc ac : \bigcirc bc \text{ (§ 18)}.$$

Par conséquent on en conclut

$$\bigcirc ac : \bigcirc bc = 1 : \sin cab,$$

d'où il résulte que la proposition énoncée se trouve établie pour un triangle quelconque.

§ 26.



Dans tout triangle sphérique, les sinus des côtés sont entre eux comme les sinus des angles opposés à ces côtés.

Soient, en effet, $abc = R$, et ced ⊥ au rayon oa de la sphère. On aura ced ⊥ aob, et (boc étant aussi ⊥ boa), cd ⊥ ob. Or, dans les triangles ceo, cdo, on a (§ 25)

$$\bigcirc ec : \bigcirc oc : \bigcirc dc = \sin coe : 1 : \sin cod$$
$$= \sin ac : 1 : \sin bc.$$

Mais on a aussi (§ 25)

$$\bigcirc ec : \bigcirc dc = \sin cde : \sin ced.$$

Donc

$$\sin ac : \sin bc = \sin cde : \sin ced.$$

Mais $cde = R = cba$, et $ced = cab$. Par conséquent

$$\sin ac : \sin bc = 1 : \sin a.$$

De là découle toute la Trigonométrie sphérique, qui se trouve ainsi établie indépendamment de l'Axiôme XI.

§ 27.

Si ac et bd sont ⊥ ab, et qu'on transporte $\wedge\, cab$ le long de $\overrightarrow{ab}$, on aura, en désignant par cd le chemin décrit par le point c,

$$cd : ab = \sin u : \sin v.$$

Soit, en effet, $de \perp ca$. Dans les triangles ade, adb, on a (§ 25)

$$\bigcirc ed : \bigcirc ad : \bigcirc ab = \sin u : 1 : \sin v.$$

En faisant tourner $bacd$ autour de ac, le point b décrira $\bigcirc ab$,



et le point d décrira $\bigcirc ed$. Désignons ici par $\odot cd$ le chemin de la ligne cd. Soit, de plus, un polygone quelconque $bfg\ldots$, inscrit dans $\odot ab$. En menant par tous les côtés bf, fg,... des plans $\perp \odot ab$, on formera ainsi dans $\odot cd$ une figure polygonale d'un même nombre de côtés, et l'on pourra démontrer, comme au § 23, que l'on a

$$cd : ab = dh : bf = hk : fg = \cdots,$$

et par suite

$$dh + hk + \cdots : bf + fg + \cdots = cd : ab.$$

Si l'on fait tendre chacun des côtés bf, fg,... vers la limite zéro, il est clair que l'on aura

$$bf + fg + \cdots \sim \bigcirc ab,$$

et

$$dh + hk + \cdots \sim \bigcirc ed.$$

On a donc aussi

$$\bigcirc ed : \bigcirc ab = cd : ab.$$

Or, nous avions déjà

$$\bigcirc ed : \bigcirc ab = \sin u : \sin v.$$

Par conséquent

$$cd : ab = \sin u : \sin v.$$

Si ac s'éloigne de bd à l'infini, alors le rapport $cd : ab$, et par suite aussi le rapport $\sin u : \sin v$ restent *constants*. Or $u \sim R$ (§ 1), et si $dm \parallel\!| bn$, $v \sim z$. Donc $cd : ab = 1 : \sin z$.

Nous désignerons ce chemin cd par $cd \parallel ab$.

§ 28.

Si $bn \parallel\!| \simeq am$, et que c soit un point de $\overrightarrow{am}$, en posant $ac = x$, on aura (§ 23)

$$X = \sin u : \sin v.$$

Car cd et ae étant $\llcorner\, bn$, et $bf \llcorner am$, on aura (comme au § 27)



$$\bigcirc bf : \bigcirc cd = \sin u : \sin v.$$

Or, on a évidemment $bf = ae$. Donc

$$\bigcirc ea : \bigcirc dc = \sin u : \sin v.$$

Mais dans les surfaces F de am et de cm, qui coupent $ambn$ suivant ab et cg, on a (§ 21)

$$\bigcirc ea : \bigcirc dc = ab : cg = X.$$

Donc aussi

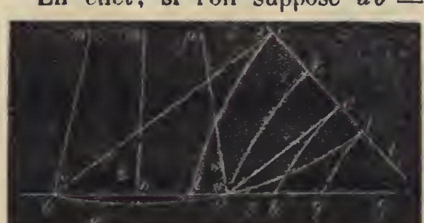
$$X = \sin u : \sin v.$$

§ 29.

Si $bam = R$, $ab = y$, et $bn \parallel\!| \, am$, on aura, dans le système S,

$$Y = \operatorname{cotang} \tfrac{1}{2} u.$$

En effet, si l'on suppose $ab = ac$, $cp \parallel\!| \, am$ (et par suite



$bn \parallel\!| \simeq cp$), et $pcd = qcd$, on peut mener (§ 19) $ds \llcorner \overrightarrow{cd}$, de telle sorte que $ds \parallel\!| \, cp$, et par suite (§ 1) $dt \parallel\!| \, cq$. Si, de plus, $be \llcorner \overrightarrow{ds}$, alors (§ 7) $ds \parallel\!| \, bn$; par conséquent (§ 6), $bn \parallel\!| \, es$, et (à cause de $dt \parallel\!| \, cg$), $bq \parallel\!| \, et$. Donc (§ 1) $ebn = ebq$. Soit bcf une ligne L de bn, et fg, dh, ck, el des lignes L de ft, dt, cq, etc. On aura évidemment (§ 22) $hg = df = dk = hc$; partant $cg = 2\,ch = 2\,v$. Il est clair que l'on a de même $bg = 2\,bl = 2\,z$. Or $bc = bg - gc$; par suite $y = z - v$, d'où (§ 24) $Y = Z : V$. On a enfin (§ 28)

$$Z = 1 : \sin \tfrac{1}{2} u, \qquad V = 1 : \sin (R - \tfrac{1}{2} u).$$

Donc

$$Y = \operatorname{cotang} \tfrac{1}{2} u \text{ [*]}.$$

---

[*] L'angle u est celui que Lobatschewsky représente par $\Pi\,(ab)$. (Voyez *Études géométriques*, etc., n° 36.) *(H.)*

§ 30.

Il est facile de voir (d'après le § 25) que la résolution du problème de la *Trigonométrie plane*, dans le système S, exige l'expression de la circonférence au moyen du rayon. Or, c'est ce que l'on peut obtenir par la rectification de la ligne L.



Soient ab, cm, $c'm'$ des droites $\perp \overrightarrow{ac}$, et b un point quelconque de $\overrightarrow{ab}$. On aura (§ 25)

sin u : sin $v = \bigcirc p : \bigcirc y$,

sin u' : sin $v' = \bigcirc p : \bigcirc y'$;

par conséquent,

$$\frac{\sin u}{\sin v} \cdot \bigcirc y = \frac{\sin u'}{\sin v'} \cdot \bigcirc y'.$$

Or, on a (§ 27)

$$\sin v : \sin v' = \cos u : \cos u'.$$

Donc

$$\frac{\sin u}{\cos u} \cdot \bigcirc y = \frac{\sin u'}{\cos u'} \cdot \bigcirc y',$$

ou

$$\bigcirc y : \bigcirc y' = \text{tang } u' : \text{tang } u = \text{tang } w : \text{tang } w'.$$

Soient, de plus, cn et $c'n'$ $|||$ ab, et cd, $c'd'$ des lignes $L \perp \overline{ab}$. On aura encore (§ 21)

$$\bigcirc y : \bigcirc y' = r : r',$$

d'où

$$r : r' = \text{tang } w : \text{tang } w'.$$

Faisons croître p à partir de a jusqu'à l'infini : alors $w \rightharpoonup z$, $w' \rightharpoonup z'$; d'où il résulte aussi

$$r : r' = \text{tang } z : \text{tang } z'.$$

Désignons par i le rapport *constant* r : tang z (*indépendant* de r). Si l'on suppose $y \rightharpoonup 0$, alors

$$\frac{r}{y} = \frac{i \text{ tang } z}{y} \rightharpoonup 1,$$

et par suite

$$\frac{y}{\operatorname{tang} z} \sim i.$$

D'après le § 29, il vient

$$\operatorname{tang} z = \tfrac{1}{2}(Y - Y^{-1}).$$

Donc

$$\frac{2y}{Y - Y^{-1}} \sim i,$$

ou (§ 24)

$$\frac{2y \cdot I^{\frac{y}{i}}}{I^{\frac{2y}{i}} - 1} \sim i.$$

Or, on sait que la limite de cette expression, pour $y \sim 0$, est $\frac{i}{\log \operatorname{nat} I}$. Donc

$$\frac{i}{\log \operatorname{nat} I} = i,$$

et par conséquent

$$I = e = 2{,}7182818\ldots,$$

nombre qui se présente encore ici d'une manière remarquable. En désignant désormais par i la droite dont le I est $= e$, on aura

$$r = i \operatorname{tang} z.$$

Nous avons d'ailleurs trouvé (§ 21) $\bigcirc y = 2\pi r$. Donc

$$\bigcirc y = 2\pi i \operatorname{tang} z = \pi i (Y - Y^{-1}) = \pi i \left(e^{\frac{y}{i}} - e^{-\frac{y}{i}}\right) \text{ [*]}$$

$$= \frac{\pi y}{\log \operatorname{nat} Y}(Y - Y^{-1}) \text{ (§ 24).}$$

§ 31.

Pour la résolution trigonométrique de tous les triangles rectilignes rectangles (d'où l'on déduit aisément celle des triangles

[*] Ou, en introduisant, pour plus de simplicité, la notation des fonctions hyperboliques,

$$\bigcirc y = 2\pi i \operatorname{Sh} \frac{y}{i}.$$

(H.)

rectilignes quelconques), dans le système S, il suffit de trois équations. Soient a, b les côtés de l'angle droit, c l'hypoténuse; α, β les angles respectivement opposés à a, b. Ces trois équations seront celles qui exprimeront des relations

I. Entre a, c, α;

II. Entre a, α, β;

III. Entre a, b, c.



De ces équations on tirera ensuite les trois autres par l'élimination.

I. Des §§ 25 et 30 il résulte

$$1 : \sin\alpha = (C - C^{-1}) : (A - A^{-1})$$

$$= \left(e^{\frac{c}{i}} - e^{-\frac{c}{i}}\right) : \left(e^{\frac{a}{i}} - e^{-\frac{a}{i}}\right),$$

équation entre c, a, α [*].

II. Du § 27 on tire (βm étant ||| γn)

$$\cos\alpha : \sin\beta = 1 : \sin u.$$

Or, on a (§ 29) $1 : \sin u = \frac{1}{2}(A + A^{-1})$; donc

$$\cos\alpha : \sin\beta = \tfrac{1}{2}(A + A^{-1}) = \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{a}{i}} + e^{-\frac{a}{i}}\right),$$

équation entre α, β, a [**].

III. Soient $\alpha\alpha' \perp \beta\alpha\gamma$; $\beta\beta'$ et $\gamma\gamma'$ || $\alpha\alpha'$ (§ 27), et $\beta'\alpha'\gamma' \perp \alpha\alpha'$. On aura évidemment (comme au § 27)

$$\frac{\beta\beta'}{\gamma\gamma'} = \frac{1}{\sin u} = \tfrac{1}{2}(A + A^{-1}),$$

$$\frac{\gamma\gamma'}{\alpha\alpha'} = \tfrac{1}{2}(B + B^{-1}),$$

$$\frac{\beta\beta'}{\alpha\alpha'} = \tfrac{1}{2}(C + C^{-1}).$$

---

[*] $$\sin\alpha \,\mathrm{Sh}\,\frac{c}{i} = \mathrm{Sh}\,\frac{a}{i}.$$

[**] $$\cos\alpha = \sin\beta \,\mathrm{Ch}\,\frac{a}{i}.$$

Par conséquent,

$$\tfrac{1}{2}(C + C^{-1}) = \tfrac{1}{2}(A + A^{-1}).\,\tfrac{1}{2}(B + B^{-1}),$$

ou

$$e^{\frac{c}{i}} + e^{-\frac{c}{i}} = \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{a}{i}} + e^{-\frac{a}{i}}\right).\,\left(e^{\frac{b}{i}} + e^{-\frac{b}{i}}\right),$$

équation entre a, b, c [*].

Si $\gamma\alpha\delta = R$, et qu'on ait $\beta\delta \llcorner \alpha\delta$, alors il viendra

$$\bigcirc c : \bigcirc a = 1 : \sin\alpha,$$

et

$$\bigcirc c : \bigcirc (d = \beta\gamma) = 1 : \cos\alpha.$$

En désignant donc par $\bigcirc x^2$, pour une valeur quelconque de x, le produit $\bigcirc x \,.\, \bigcirc x$, on aura évidemment

$$\bigcirc a^2 + \bigcirc d^2 = \bigcirc c^2.$$

Or, nous avons trouvé (§ 27 et § 31, II)

$$\bigcirc d = \bigcirc b.\,\tfrac{1}{2}(A + A^{-1}).$$

Par conséquent [**]

$$\left(e^{\frac{c}{i}} - e^{-\frac{c}{i}}\right)^2 = \tfrac{1}{4}\left(e^{\frac{a}{i}} + e^{-\frac{a}{i}}\right)^2.\left(e^{\frac{b}{i}} - e^{-\frac{b}{i}}\right)^2 + \left(e^{\frac{a}{i}} - e^{-\frac{a}{i}}\right)^2,$$

autre relation entre a, b, c, dont le second membre se ramène aisément à une forme *symétrique* ou *invariable* [***].

Enfin, des équations

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\beta} = \tfrac{1}{2}(B + B^{-1}), \quad \frac{\cos\beta}{\sin\alpha} = \tfrac{1}{2}(A + A^{-1})$$

---

[*] $\operatorname{Ch}\frac{c}{i} = \operatorname{Ch}\frac{a}{i}\operatorname{Ch}\frac{b}{i}.$

[**] $\operatorname{Sh}^2\frac{c}{i} = \operatorname{Ch}^2\frac{a}{i}\operatorname{Sh}^2\frac{b}{i} + \operatorname{Sh}^2\frac{a}{i}.$

[***] $\operatorname{Sh}^2\frac{c}{i} = \operatorname{Ch}^2\frac{a}{i}\operatorname{Ch}^2\frac{b}{i} - 1$

$= \operatorname{Sh}^2\frac{a}{i}\operatorname{Sh}^2\frac{b}{i} + \operatorname{Sh}^2\frac{a}{i} + \operatorname{Sh}^2\frac{b}{i}.$

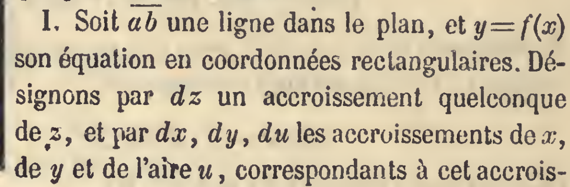
on tire (d'après II)

$$\cot \alpha \cot \beta = \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{c}{i}} + e^{-\frac{c}{i}}\right) \text{ [*]},$$

équation entre α, β, c.

§ 32.

Il reste encore à montrer brièvement le moyen de résoudre les problèmes dans le système S. Après l'avoir expliqué sur les exemples les plus ordinaires, nous verrons enfin ce que peut donner cette théorie.



I. Soit $\overline{ab}$ une ligne dans le plan, et $y = f(x)$ son équation en coordonnées rectangulaires. Désignons par dz un accroissement quelconque de z, et par dx, dy, du les accroissements de x, de y et de l'aire u, correspondants à cet accroissement dz. Soit $bh \parallel cf$; exprimons (§ 31) $\dfrac{bh}{dx}$ au moyen de y, et cherchons la *limite* de $\dfrac{dx}{dy}$, lorsque dx tend vers la limite zéro (ce qui est toujours sous-entendu, lorsqu'on cherche de pareilles limites). On connaîtra alors la limite de $\dfrac{dy}{bh}$, et par suite tang hbg; et par conséquent (hbc ne pouvant évidemment être ni $>$, ni $< R$, et par suite étant $= R$), la *tangente* en b à la ligne bg sera déterminée au moyen de y.

II. On peut démontrer que l'on a

$$\frac{dz^2}{dy^2 + bh^2} \sim 1.$$

On déduit de là la limite de $\dfrac{dz}{dx}$, et l'on en tire, par l'intégration, l'expression de z au moyen de x. Étant donnée une courbe réelle quelconque, on peut trouver son équation dans le système S. Cher-

[*] $\cot \alpha \cot \beta = \mathrm{Ch}\,\dfrac{c}{i}$.

chons, par exemple, l'équation d'une ligne L. Soit $\overrightarrow{am}$ l'axe de la ligne L; toute droite menée par a, autre que $\overline{am}$, rencontrant L (§ 19), la droite quelconque $\overrightarrow{cb}$, partant d'un point de $\overrightarrow{am}$, rencontrera L. Or, si bn est un axe, on a

$$X = 1 : \sin cbn \ (\S\ 28),$$

$$Y = \cot \tfrac{1}{2}\, cbn \ (\S\ 29),$$

d'où l'on tire

$$Y = X + \sqrt{X^2 - 1},$$

ou

$$e^{\frac{y}{i}} = e^{\frac{x}{i}} + \sqrt{e^{\frac{2x}{i}} - 1},$$

ce qui est l'équation cherchée [*]. On tire de là

$$\frac{dy}{dx} = X.\,(X^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}.$$

Or

$$\frac{bh}{dx} = 1 : \sin cbn = X.$$

Donc

$$\frac{dy}{bh} = (X^2 - 1)^{-\frac{1}{2}},$$

$$1 + \frac{dy^2}{bh^2} = X^2.\,(X^2 - 1)^{-1},$$

$$\frac{dz^2}{bh^2} = X^2.\,(X^2 - 1)^{-1},$$

$$\frac{dz}{bh} = X.\,(X^2 - 1)^{-\frac{1}{2}},$$

et

$$\frac{dz}{dx} = X^2\,(X^2 - 1)^{-\frac{1}{2}},$$

---

[*] On peut écrire cette équation sous la forme

$$\mathrm{Ch}\,\frac{y}{i} = e^{\frac{x}{i}}.$$

d'où, en intégrant, on tire (comme au § 30)

$$z = i\,(X^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} = i \cot cbn \text{ [*]}.$$

III. On a évidemment

$$\frac{du}{dx} \backsim \frac{hfcbh}{dx}.$$

Si cette quantité n'est pas donnée en y, il faut l'exprimer au moyen de y, puis en tirer u par l'intégration.



En posant $ab = p$, $ac = q$, $cd = r$ et $cabd = s$, on pourra faire voir (comme dans II) que l'on a $\frac{ds}{dq} \backsim r$, quantité égale à

$$\tfrac{1}{2}\, p \left(e^{\frac{q}{i}} + e^{-\frac{q}{i}}\right),$$

d'où, en intégrant,

$$s = \tfrac{1}{2}\, pi \left(e^{\frac{q}{i}} - e^{-\frac{q}{i}}\right) \text{ [**]}.$$

On peut aussi obtenir ce résultat sans intégration. Si l'on établit, par exemple, les équations du cercle (d'après le § 31, III), de la droite (d'après le § 31, II), d'une section conique (d'après ce qui précède), on pourra exprimer aussi les aires limitées par ces lignes.

On sait qu'une surface t, || à une figure plane p (à la distance q), est à p dans le rapport des secondes puissances des lignes homologues, c'est-à-dire dans le rapport de $\frac{1}{4}\left(e^{\frac{q}{i}} + e^{-\frac{q}{i}}\right)^2 : 1$. Il est aisé de voir, de plus, que le calcul du volume, traité de la même manière, exige deux intégrations (la différentielle elle-même ne pouvant se déterminer que par l'intégration). Il faut avant tout

---

[*] $z = i \operatorname{Sh} \frac{y}{i}$.

[**] $s = ip \operatorname{Sh} \frac{q}{i}$.

chercher le volume renfermé entre p et t, et l'ensemble de toutes les droites $\perp p$ et reliant les limites de p et de t. On trouve, pour le volume de ce solide (soit au moyen de l'intégration, soit autrement)

$$\frac{1}{8} pi \left(e^{\frac{2q}{i}} - e^{-\frac{2q}{i}}\right) + \frac{1}{2} pq \text{ [*]}.$$

Les surfaces des corps peuvent aussi se calculer dans le système S, ainsi que les *courbures*, les *développées* et les *développantes* des lignes quelconques, etc. Quant à la courbure, dans le système S, ou elle sera la courbure de la ligne L elle-même, ou on la déterminera soit par le rayon d'un cercle, soit par la *distance* d'une droite à la courbe || à cette droite; et il est aisé de faire voir, d'après ce qui précède, qu'il n'y a pas, dans un plan, d'autres lignes uniformes que les lignes L, les lignes circulaires et les courbes || aux lignes droites.

IV. Pour le cercle, on a (comme dans III)

$$\frac{d\odot x}{dx} \backsim \bigcirc x,$$

d'où (§ 29), en intégrant, on tire

$$\odot x = \pi i^2 \left(e^{\frac{x}{i}} - 2 + e^{-\frac{x}{i}}\right) \text{ [**]}$$



V. Soit $u = cabdc$ l'aire comprise entre une ligne L, $ab = r$, une || à cette ligne $cd = y$, et les droites $ac = bd = x$. On a

$$\frac{du}{dx} \backsim y, \quad \text{et (§ 24)} \quad y = re^{-\frac{x}{i}},$$

d'où, en intégrant,

$$u = ri\left(1 - e^{-\frac{x}{i}}\right).$$

---

[*] $$\frac{1}{2} p \left(\frac{1}{2} i \operatorname{Sh} \frac{2q}{i} + q\right).$$

[**] $$\odot x = 4 \pi i^2 \operatorname{Sh}^2 \frac{x}{2i}.$$

Si x croît jusqu'à l'infini, alors, dans le système S, $e^{-\frac{x}{i}} \backsim 0$, et par suite

$$u \backsim ri.$$

C'est cette limite que nous appellerons la *grandeur* de $mabn$.

On verra de la même manière que, si p est une figure tracée sur F, l'espace compris entre p et l'ensemble des axes menés par les divers points du contour de p est égal à $\frac{1}{2} pi$.



VI. Soient $2u$ l'angle au centre de la calotte sphérique z, p la circonférence d'un grand cercle, et x l'arc fc, correspondant à l'angle u. On aura (§ 25)

$$1 : \sin u = p : \bigcirc bc,$$

d'où

$$\bigcirc bc = p \sin u.$$

On a d'ailleurs

$$x = \frac{pu}{2\pi}, \qquad dx = \frac{pdu}{2\pi}.$$

De plus,

$$\frac{dz}{dx} \backsim \bigcirc bc,$$

$$\frac{dz}{du} \backsim \frac{p^2}{2\pi} \sin u,$$

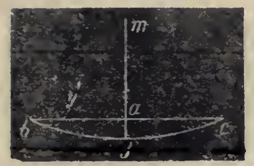
et, en intégrant,

$$z = \frac{\text{sin verse } u}{2\pi} p^2.$$

Imaginons la surface F sur laquelle est située la circonférence p (passant par le milieu f de la calotte). Menons par af et ac les plans $\overrightarrow{fem}$, $\overrightarrow{cem}$, perpendiculaires à F, et coupant F suivant feg, ce; et considérons la ligne L, cd (menée par c perpendiculairement à feg), et la ligne L, cf. On aura (§ 20) $cef = u$, et (§ 21) $\frac{fd}{p} = \frac{\text{sin verse } u}{2\pi}$, d'où $z = fd.\, p$. Or (§ 21) $p = \pi.\, fdg$; donc

$z\,\pi.\,fd.\,fdg$. Mais (§ 21) $fd.\,fdg = fc.\,fc$; par conséquent,

$$z = \pi.\,fc.\,fc = \odot\, fc, \text{ dans } F.$$



Soit maintenant $bj = cj = r$; on aura (§ 30)

$$2r = i\,(Y - Y^{-1}),$$

d'où (§ 21)

$$\odot\, 2r \text{ (dans } F) = \pi i^2 (Y - Y^{-1})^2.$$

On a aussi (IV)

$$\odot\, 2y = \pi i^2 (Y^2 - 2 + Y^{-2}).$$

Donc $\odot\, 2r$ (dans F) $= \odot\, 2y$, et par suite *la surface z du segment de sphère est égale au cercle décrit avec la corde fc comme rayon.* Donc la sphère totale a pour surface

$$\odot\, fg = fdg.\,p = \frac{p^2}{\pi},$$

et les surfaces des sphères sont entre elles comme les secondes puissances des circonférences de leurs grands cercles.



VII. On trouve de même que, dans le système S, le volume de la sphère de rayon x est égal à

$$\tfrac{1}{2}\,\pi i^3 (X^2 - X^{-2}) - 2\pi i^2 x \text{ [*]}.$$

La surface engendrée par la révolution de la ligne cd autour de ab est égale à

$$\tfrac{1}{2}\,\pi i p\,(Q^2 - Q^{-2}) \text{ [**]},$$

et le solide engendré par $cabdc$ est égal à

$$\tfrac{1}{4}\,\pi i^2 p\,(Q - Q^{-1})^2 \text{ [***]}.$$

---

[*] $\pi i^3\, \mathrm{Sh}\, \frac{2x}{i} - 2\pi i^2 x.$

[**] $\pi i p\, \mathrm{Sh}\, \frac{2q}{i}.$

[***] $\pi i^2 p\, \mathrm{Sh}^2\, \frac{\ }{\ }.$

Nous supprimons, pour abréger, la méthode par laquelle on peut obtenir sans intégration tous les résultats obtenus jusqu'ici, à partir de (IV).

On peut démontrer que *la limite de toute expression contenant la lettre i* (et fondée par conséquent sur l'hypothèse qu'*il existe une grandeur i*), *lorsque i croît jusqu'à l'infini, donne l'expression correspondante dans le système* Σ (et par suite dans l'hypothèse où *il n'existe pas de grandeur i*), *pourvu qu'il ne se rencontre pas d'équations identiques.* Mais il faut se garder de croire que *le système lui-même puisse être changé à volonté* (car il est entièrement *déterminé en soi et par soi*); c'est seulement l'*hypothèse* qui peut varier, et que l'on peut successivement changer, tant que l'on n'est pas conduit à une absurdité. En *supposant* donc que, dans une telle expression, la lettre i, au cas où le système S serait celui de la réalité, désigne la quantité unique dont le I a pour valeur e; si l'on vient à reconnaître que c'est le système Σ qui est *réellement vrai, imaginons que la limite en question* soit prise au lieu de l'expression primitive. Alors il est évident que *toutes les expressions fondées sur l'hypothèse de la réalité du système S seront* (dans ce cas) *absolument vraies, lors même qu'on ignore complètement si c'est le système* Σ *qui est ou non le système de la réalité.*

Ainsi, par exemple, de l'expression obtenue au § 30 on tire facilement (soit au moyen de la différentiation, soit autrement) la valeur connue dans le système Σ,

$$\bigcirc x = 2\pi x.$$

De I (§ 31) on conclut, par des transformations convenables,

$$1 : \sin\alpha = c : a;$$

de II on tire

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\beta} = 1,$$

et par suite

$$\alpha + \beta = R.$$

La *première* équation de III devient identique, et par suite elle

est vraie dans le système Σ, quoiqu'elle n'y détermine rien. De la *seconde* on conclut

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Ce sont là les équations fondamentales connues de la Trigonométrie plane dans le système Σ. On trouve, de plus (d'après le § 32), dans le système Σ, pour l'aire et le volume dans III, la même valeur pq. On a, d'après IV,

$$\odot x = \pi x^2.$$

D'après VII, la sphère de rayon x est $= \frac{4}{3} \pi x^3$, etc. Les théorèmes énoncés à la fin de VI sont évidemment *vrais sans conditions*.

§ 33.

Il reste encore à exposer (comme nous l'avons annoncé au § 32) quel est le but de cette théorie.

I. Est-ce le système Σ ou le système S qui a lieu dans la réalité? C'est ce qu'on ne saurait décider.

II. Toutes les hypothèses tirées de la *fausseté* de l'Axiôme XI (en prenant toujours ces mots dans le sens du § 32) sont *absolument vraies,* et en ce sens, *ne s'appuient sur aucune hypothèse.* Il y a donc *une Trigonométrie plane* a priori, *dans laquelle le système seul vrai reste inconnu,* et où l'on ignore seulement les grandeurs *absolues* des expressions, mais où un *seul* cas connu fixerait évidemment tout le système. La Trigonométrie sphérique, au contraire, est établie d'une manière absolue au § 26.

On a, sur la surface F, une géométrie entièrement analogue à la géométrie plane dans le système Σ.

III. S'il était *établi* que c'est le système Σ qui a lieu, il ne resterait plus rien d'inconnu sur ce point. Mais s'il était *établi* que le système Σ *n'est pas vrai,* alors (§ 31), *étant donnés,* par exemple, *d'une manière concrète,* les côtés x, y et l'angle rectiligne qu'ils comprennent, il est clair qu'il serait impossible en soi et par soi de résoudre absolument le triangle, c'est-à-dire de déterminer *a priori* les autres angles et les rapports du troisième côté aux

deux côtés donnés, à moins que l'on ne déterminât les quantités X, Y. Pour cela, il faudrait que l'on eût *sous forme concrète* quelque longueur a dont le A fût connu. Alors i serait l'*unité naturelle de longueur* (comme e est la base des logarithmes *naturels*). Si l'existence de cette quantité i est supposée reconnue, nous verrons comment on peut la construire, au moins avec une grande approximation, pour la pratique.

IV. Dans le sens expliqué (I et II), on pourra évidemment appliquer partout la méthode analytique moderne (si utile, lorsqu'on l'emploie dans des limites convenables).

V. Enfin, le lecteur ne sera pas fâché de voir que, dans le cas où c'est le système S, et non le système Σ, qui a réellement lieu, on peut construire une figure rectiligne égale à un cercle.

§ 34.

Par d, on mènera $dm \parallel\!| \; an$ de la manière suivante. Du point d abaissons $db \perp an$; en un point quelconque a de la droite $\overline{ab}$, élevons $ac \perp an$ (dans le plan dba), et abaissons $de \perp ac$. On aura (§ 27)

$$\bigcirc ed : \bigcirc ab = 1 : \sin z,$$

pourvu que dm soit $\parallel\!|$ bn. Or, $\sin z$ n'est pas > 1; donc ab n'est pas $> de$. Donc un quadrant décrit du centre a dans bac, avec un rayon $= de$, aura un point b ou o commun avec $\overline{bd}$. Dans le premier cas, on a évidemment $z = R$. Dans le second cas, on aura (§ 25)

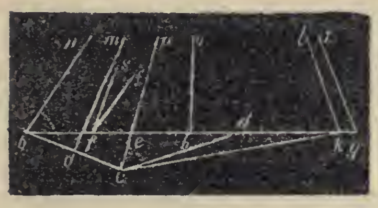
$$\bigcirc ao \; (= \bigcirc ed) : \bigcirc ab = 1 : \sin aob,$$

et par suite $z = aob$. Si donc on prend $z = aob$, dm sera $\parallel\!|$ bn.

§ 35.

Si c'est le système S qui a lieu, on pourra, comme il suit, mener une droite $\perp$ à l'un des côtés d'un angle aigu, et qui soit en même temps $\parallel\!|$ à l'autre côté.

Soit $am \perp bc$, et supposons $ab = ac$ assez petit (§ 19) pour que, si l'on mène $bn \parallel\!| \; am$ (§ 34), abn soit $>$ que l'angle donné.



Menons, de plus, $cp \parallel\!| \; am$ (§ 34), et soient nbg, pcd égaux l'un et l'autre à l'angle donné. $\overrightarrow{bg}$ et $\overrightarrow{cd}$ se rencontreront; car si $\overrightarrow{bg}$ (tombant, *par construction*, à l'intérieur de nbc) coupe $\overrightarrow{cp}$ en e, on aura (à cause de $bn \bumpeq cp$) $ebc < ecb$, et par suite $ec < eb$. Soient $ef = ec$, $efr = ecd$, et $fs \parallel\!| \; ep$; fs tombera dans l'angle bfr. Car, puisque $bn \parallel\!| \; cp$, d'où $bn \parallel\!| \; ep$, et $bn \parallel\!| \; fs$, on aura (§ 14) $fbn + bfs < 2R = fbn + bfr$. Donc $bfs < bfr$. Par conséquent, $\overrightarrow{fr}$ coupe $\overrightarrow{ep}$, et par suite $\overrightarrow{cd}$ coupe aussi $\overrightarrow{eg}$ quelque part en d. Soient maintenant $dg = dc$, et $dgt = dcp = gbn$. On aura (à cause de $cd \bumpeq gd$) $bn \bumpeq gt \bumpeq cp$. Soit k (§ 19) le point où la ligne L de bn rencontre $\overrightarrow{bg}$, et kl l'axe de cette ligne L. On aura $bn \bumpeq kl$, et par suite $bkl = bgt = dcp$. D'ailleurs, $kl \bumpeq cp$. Donc k tombe évidemment en g, et $gt \parallel\!| \; bn$. Si l'on élève maintenant $ho \perp$ sur le milieu de bg, on aura construit $ho \parallel\!| \; bn$.

§ 36.

Étant donnés la droite $\overrightarrow{cp}$ et le plan $\overline{mab}$, soit $cb \perp \overline{mab}$, bn (dans $\overline{bcp}$) $\perp bc$, et $cq \parallel\!| \; bn$ (§ 34). La rencontre de $\overrightarrow{cp}$ (si cette ligne tombe à l'intérieur de bcq) avec $\overline{bn}$ (dans $\overline{cbn}$), et par suite avec $\overline{mab}$, peut se déterminer. Et si l'on donne les deux plans $\overline{pcq}$, $\overline{mab}$, et que l'on ait $cb \perp \overline{mab}$, $cr \perp \overline{pcq}$, et (dans $\overline{bcr}$), $bn \perp bc$, $cs \perp cr$, bn tombera dans $\overline{mab}$, et cs dans $\overline{pcq}$; et lorsqu'on aura trouvé l'intersection de $\overline{bn}$ et de $\overline{cs}$ (si elle a lieu), la perpendiculaire menée par cette intersection, dans $\overline{pcq}$, à la droite $\overline{cs}$ sera évidemment l'intersection de $\overline{mab}$ et de $\overline{pcq}$.



§ 37.

Sur $\overline{am}$ ||| bn il se trouve un point a, tel qu'on a $am \bumpeq bn$.

Si (d'après le § 34) on construit, hors de $\overline{nbm}$, gt ||| bn, et qu'on fasse $bg \perp gt$, $gc = gb$, et cp ||| gt; soit mené $\overrightarrow{tgd}$ de telle manière qu'il fasse avec $\overrightarrow{tgb}$ un angle égal à celui que fait $\overrightarrow{pca}$ avec $\overline{pcb}$. Cherchons ensuite (§ 36) l'intersection $\overline{dq}$ de $\overrightarrow{tgd}$ avec $\overrightarrow{nba}$, et soit enfin $ba \perp dq$.

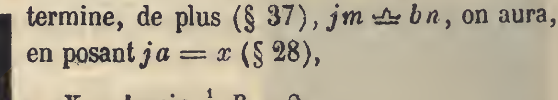


On aura, à cause de la similitude des triangles de lignes L tracés sur le F de bn (§ 21), $db = da$, et $am \bumpeq bn$.

Il est facile d'en conclure que, des lignes L étant données par leurs seules extrémités, on peut obtenir de cette manière, dans F, une quatrième proportionnelle, ou une moyenne proportionnelle, et exécuter, sans recourir à l'Axiôme XI, toutes les constructions géométriques qui se font sur le plan dans le système Σ. Ainsi, par exemple, on pourra diviser géométriquement $4\,R$ en un nombre quelconque de parties égales, si l'on sait faire cette division dans le système Σ.

§ 38.

Si l'on construit (§ 37) par exemple, $nbq = \frac{1}{3}R$, et qu'on mène (§ 35), dans le système S, $am \perp \overrightarrow{bq}$ et ||| bn; si l'on détermine, de plus (§ 37), $jm \bumpeq bn$, on aura, en posant $ja = x$ (§ 28),



$$X = 1 : \sin \tfrac{1}{3} R = 2,$$

et x sera construit *géométriquement*. On peut calculer nbq de manière que ja diffère de i aussi peu que l'on voudra, ce qui aura lieu pour $\sin nbq = \frac{1}{e}$.

§ 39.

Si (dans un plan) pq et st sont || à la droite mn (§ 27), et

que les perpendiculaires ab, cd à mn soient égales entre elles, on aura évidemment $\Delta\, dec \equiv \Delta\, bea$; par suite, les angles (peut-



être mixtilignes) ecp, eat coïncideront, et l'on aura $ec = ea$. Si, de plus, $cf = ag$, alors $\Delta\, acf \equiv \Delta\, cag$, et chacun d'eux est la moitié du *quadrilatère* $fagc$. Si $fagc$, $hagk$ sont deux de ces quadrilatères, de base ag, compris entre pq et st, on démontrera leur équivalence (comme chez Euclide), ainsi que l'équivalence des triangles agc, agh, de base commune ag, et ayant leurs sommets sur $\overline{pq}$. On a, de plus, $acf = cag$, $gcq = cga$, et $acf + agc + gcq = 2\,R$ (§ 32); par suite, on a aussi $cag + acg + cga = 2\,R$. Donc, dans tout triangle acg de cette espèce, la somme des angles $= 2\,R$. Soit que la droite ag coïncide avec ag ($\parallel mn$), ou non, l'équivalence des triangles agc, agh, *tant sous le rapport de leurs aires que sous celui de la somme de leurs angles*, est évidente.

§ 40.

Des triangles équivalents abc, abd (que nous supposerons désormais rectilignes), ayant un côté égal, ont des sommes d'angles égales.

Menons, en effet, mn par les milieux de ac et de bc, et soit (par le point c) $pq \parallel mn$. Le point d tombera sur $\overline{pq}$. Car, si $\overrightarrow{bd}$

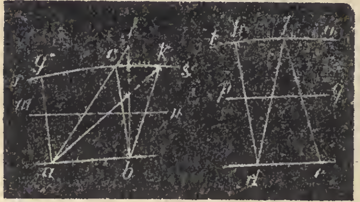


coupe $\overline{mn}$ au point e, et par conséquent $\overline{pq}$ à la distance $ef = eb$, on aura $\Delta abc = \Delta abf$, et par suite aussi $\Delta abd = \Delta\, abf$, d'où il s'ensuit que d tombe en f. Mais si $\overrightarrow{bd}$ ne coupe pas $\overline{mn}$, soit c le point où la perpendiculaire au milieu de ab rencontre $\overline{pq}$, et soit $gs = ht$, de sorte que $\overline{st}$ rencontre $\overrightarrow{bd}$ prolongée en un certain point k (ce qui peut se faire comme on l'a vu au § 4). Soient, de plus, $sl = sa$, $lo \parallel st$, et o l'intersection de $\overrightarrow{bk}$ avec $\overline{lo}$. On aurait alors $\Delta\, abl = \Delta\, abo$ (§ 39), et par suite $\Delta\, abc > \Delta\, abd$, ce qui serait contraire à l'hypothèse.

§ 41.

Des triangles équivalents abc, def ont des sommes d'angles égales.

Menons mn par les milieux de ac et de bc, et pq par les milieux de df et de fe; et soient $rs \parallel mn$, $to \parallel pq$. La perpendiculaire ag à rs sera égale à la perpendiculaire dh à to, ou elle en différera; par exemple, dh sera la plus grande. Dans chacun de ces deux cas, la $\bigcirc\, df$, décrite du centre a, aura avec $\overrightarrow{gs}$ quelque point commun k,



et alors (§ 39) on aura $\triangle\, abk = \triangle\, abc = \triangle\, def$. Or, le $\triangle\, akb$ (§ 40) a même somme d'angles que le $\triangle\, def$, et (§ 39) même somme d'angles que le $\triangle\, abc$. Donc les triangles abc, def ont même somme d'angles.

Dans le système S, la réciproque de ce théorème est vraie. Soient, en effet, abc, def deux triangles ayant même somme d'angles, et $\triangle\, bal = \triangle\, def$. Ces derniers triangles auront, d'après ce qui précède, la même somme d'angles, et il en sera par suite de même des triangles abc, abl. Il résulte de là évidemment

$$bcl + blc + cbl = 2\,R.$$

Or (§ 31) la somme des angles de tout triangle, dans le système S, est $< 2\,R$. Donc l tombe nécessairement en c.

§ 42.

Soit u le *supplément* à $2\,R$ de la somme des angles du $\triangle\, abc$, v le *supplément* à $2\,R$ de la somme des angles du $\triangle\, def$. On aura



$$\triangle\, abc : \triangle\, def = u : v.$$

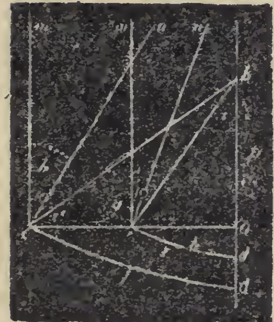
Soit, en effet, p la valeur commune de chacun des triangles acg, gch, hcb, dfk, kfe, et soit $\triangle\, abc = mp$, $\triangle\, def = np$. Désignons par s la

somme des angles d'un quelconque des triangles égaux à p. On aura évidemment $2\,R - u = ms - (m - 1).\,2\,R = 2\,R - m\,(2\,R - s)$, et $u = m\,(2\,R - s)$; de même $v = n\,(2\,R - s)$. Donc $\triangle\,abc : \triangle\,def = m : n = u : v$. La démonstration s'étend sans peine au cas de l'incommensurabilité des triangles abc, def.

On démontre de la même manière que les triangles sur la surface de la sphère sont entre eux comme les excès des sommes de leurs angles sur $2\,R$. Si deux des angles du $\triangle$ sphérique sont droits, le troisième z sera l'*excès* en question. Or, en désignant par p la circonférence d'un grand cercle, ce $\triangle$ est évidemment $= \frac{z}{2\pi} \cdot \frac{p^2}{2\pi}$ (§ 32, VI). Par conséquent, un triangle quelconque dont l'excès des angles sur $2\,R$ est z, est $= \frac{zp^2}{4\pi^2}$.

§ 43.

Ainsi, dans le système S, l'aire d'un $\triangle$ rectiligne s'exprime au moyen de la somme des angles. Si ab croît jusqu'à l'infini, alors (§ 42) le rapport $\triangle\,abc : (R - u - v)$ sera constant. Or $\triangle\,abc \rightharpoondown bacn$ (§ 32, V), et $R - u - v \rightharpoondown z$ (§ 1). Donc



$$bacn : z = \triangle\,abc : (R - u - v) = bac'n' : z'.$$

On a, de plus, évidemment (§ 30)

$$bdcn : bd'c'n' = r : r' = \text{tang}\,z : \text{tang}\,z'.$$

Or, pour $y' \rightharpoondown 0$, on a

$$\frac{bd'c'n'}{bac'n'} \rightharpoondown 1, \text{ et aussi } \frac{\text{tang}\,z'}{z'} \rightharpoondown 1.$$

Par conséquent,

$$bdcn : bacn = \text{tang}\,z : z.$$

Mais nous avons trouvé (§ 32)

$$bdcn = r.\,i = i^2\,\text{tang}\,z.$$

Donc

$$bacn = z.\ i^2.$$

En désignant désormais, pour abréger, par Δ tout triangle dont le supplément de la somme des angles est z, nous aurons ainsi

$$\Delta = z.\ i^2.$$

On conclut de là facilement que, si $or \,|||\, am$ et $ro \,|||\, ab$, l'*aire* comprise entre $\overline{or}$, $\overline{st}$, $\overline{bc}$ (laquelle est évidemment la limite absolue de l'aire des triangles rectilignes indéfiniment croissants, ou la limite de Δ pour $z \rightharpoonup 2R$), sera égale à $\pi i^2 = \odot i$ (dans F). En désignant cette limite par $\square$, on aura encore (§ 30)



$$\pi i^2 = \text{tang}^2 z.\ \square = \odot r \text{ (dans } F) \text{ (§ 21)}$$

$$= \odot s \text{ (§ 32, VI)},$$

en représentant la corde cd par s. Si maintenant, au moyen d'une perpendiculaire élevée sur le milieu du rayon donné s du cercle dans un plan (ou du rayon de forme L du cercle dans F), on construit (§ 34) $db \,|||\, \underline{\triangle} cn$; en abaissant $ca \perp db$, et élevant $cm \perp ca$, on aura z; d'où (§ 37), en prenant arbitrairement un rayon de forme L pour unité, *on pourra determiner géométriquement* $\text{tang}^2 z$, *au moyen de deux lignes uniformes de même courbure* (lesquelles, leurs seules extrémités étant données, et leurs axes construits, pourront évidemment être traitées comme des droites dans la recherche de leur commune mesure, et équivaudront sous ce rapport à des droites).



On peut, en outre, construire comme il suit un quadrilatère, par exemple, un quadrilatère régulier, d'aire $= \square$. Soit $abc = R$, $bac = \frac{1}{2} R$, $acb = \frac{1}{4} R$, et $bc = x$. On pourra exprimer X (§ 31, II) par de simples racines carrées, et le construire (§ 37).

Connaissant X, on pourra déterminer x (§ 38, ou encore §§ 29 et 35). L'octuple du $\triangle\ abc$ est évidemment $= \square$, et par là *un*



cercle plan se trouve carré géométriquement au moyen d'une figure rectiligne et de lignes uniformes de même espèce (c'est-à-dire de lignes équivalentes à des droites quant à leur comparaison entre elles). Un cercle de la surface F est planifié de la même manière; alors ou l'Axiôme XI d'Euclide est vrai, ou l'on a la quadrature géométrique du cercle, quoique rien jusqu'ici ne décide laquelle des deux propositions a réellement lieu.

Toutes les fois que $\tang^2 z$ est ou un nombre entier, ou un nombre fractionnaire rationnel, dont le dénominateur (après réduction à la plus simple expression) est ou un nombre premier de la forme $2^m + 1$ (dont $2 = 2^0 + 1$ est un cas particulier), ou un produit d'autant de nombres premiers de cette forme que l'on voudra, dont chacun (à l'exception de 2, qui peut seul entrer un nombre quelconque de fois) n'entre qu'*une seule fois* comme facteur; on pourra, par la théorie des polygones donnée par Gauss (et pour de telles valeurs de z seulement), construire une figure rectiligne $= \tang^2 z = \odot s$. Car la division de $\square$ (le théorème du § 42 s'étendant facilement à des polygones quelconques) exige évidemment le partage de $2R$, lequel (comme on peut le démontrer) n'est possible géométriquement que sous la condition précédente. Dans tous les cas pareils, ce qui précède conduit facilement au but; et toute figure rectiligne peut être transformée géométriquement en un polygone régulier de n côtés, si n est de la forme indiquée par Gauss.

Il resterait encore, pour compléter entièrement nos recherches, à démontrer l'impossibilité de décider (sans avoir recours à quelque hypothèse) si c'est le système Σ, ou quelqu'un des systèmes S (et lequel) qui a lieu réellement. C'est ce que nous réserverons pour une occasion plus favorable.

REMARQUES SUR LE MÉMOIRE PRÉCÉDENT,

PAR W. BOLYAI.

(*Tentamen*, t. II, p. 380 et suiv.)

Qu'il me soit permis d'ajouter ici quelques remarques appartenant à l'auteur de l'*Appendice,* qui voudra bien me pardonner si je n'ai pas toujours bien rendu sa pensée.

Les formules de la Trigonométrie sphérique (démontrées dans le Mémoire précédent, indépendamment de l'Axiôme XI d'Euclide) *coïncident avec les formules de la Trigonométrie plane, lorsque l'on considère* (pour nous servir d'une façon de parler provisoire) *les côtés d'un triangle sphérique comme réels, ceux d'un triangle rectiligne comme imaginaires;* de sorte que, lorsqu'il s'agit des formules trigonométriques, on peut regarder le plan comme une sphère imaginaire, en prenant pour sphère réelle celle dans laquelle $\sin R = 1$.

On démontre (§ 30) qu'il existe une certaine quantité i (dans le cas où l'Axiôme d'Euclide n'a pas lieu), telle que la quantité correspondante I est égale à la base e des logarithmes naturels. Dans ce cas, on établit encore (§ 31) les formules de la Trigonométrie plane, et de telle manière (§ 32, VII) que les formules sont encore vraies pour le cas de la réalité de l'axiôme en question, en prenant les limites des valeurs pour $i \rightarrow \infty$. Ainsi le système euclidien est en quelque sorte la limite du système anti-euclidien pour $i \rightarrow \infty$. Prenons, dans le cas de l'existence de i, l'unité $= i$, et étendons les définitions des sinus et des cosinus aux arcs imaginaires, de sorte que, p désignant un arc soit réel, soit imaginaire, l'expression

$$\frac{e^{p\sqrt{-1}} + e^{-p\sqrt{-1}}}{2}$$

soit toujours appelée le *cosinus* de p, et l'expression

$$\frac{e^{p\sqrt{-1}} - e^{-p\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

le *sinus* de p.

On aura alors, pour q réel,

$$\frac{e^q - e^{-q}}{2\sqrt{-1}} = \frac{e^{-q\sqrt{-1}.\sqrt{-1}} - e^{q\sqrt{-1}.\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

$$= \sin\left(-q\sqrt{-1}\right) = -\sin\left(q\sqrt{-1}\right),$$

et de même

$$\frac{e^q + e^{-q}}{2} = \frac{e^{-q\sqrt{-1}.\sqrt{-1}} + e^{q\sqrt{-1}.\sqrt{-1}}}{2}$$

$$= \cos\left(-q\sqrt{-1}\right) = \cos\left(q\sqrt{-1}\right),$$

en admettant que, dans le cercle imaginaire comme dans le cercle réel, les sinus de deux arcs égaux et de signe contraire soient égaux et de signe contraire, et que les cosinus de deux arcs égaux et de signe contraire soient égaux et de même signe.

On démontre, au § 25, d'une manière absolue, c'est-à-dire indépendamment de l'axiôme en question, que, dans tout triangle rectiligne, *les sinus des angles sont entre eux comme les circonférences qui ont pour rayons les côtes opposés à ces angles*. On démontre en outre, pour le cas de l'existence de la quantité i, que la circonférence de rayon y est égale à $\pi i\left(e^{\frac{y}{i}} - e^{-\frac{y}{i}}\right)$, ce qui, pour $i = 1$, devient $\pi\left(e^{y} - e^{-y}\right)$.

Par suite (§ 31), dans un Δ rectiligne rectangle dont les côtés de l'angle droit sont a et b, et l'hypoténuse c, et dont les angles opposés aux côtés a, b, c sont α, β, R, on a (pour $i = 1$) :

D'après I,

$$1 : \sin\alpha = \pi\left(e^{c} - e^{-c}\right) : \pi\left(e^{a} - e^{-a}\right),$$

et par conséquent,

$$1 : \sin \alpha = \frac{e^{c} - e^{-c}}{2\sqrt{-1}} : \frac{e^{a} - e^{-a}}{2\sqrt{-1}}$$

$$= -\sin\left(c\sqrt{-1}\right) : -\sin\left(a\sqrt{-1}\right)$$

$$= \sin\left(c\sqrt{-1}\right) : \sin\left(a\sqrt{-1}\right);$$

D'après II,

$$\cos \alpha : \sin \beta = \cos\left(a\sqrt{-1}\right) : 1;$$

D'après III,

$$\cos\left(c\sqrt{-1}\right) = \cos\left(a\sqrt{-1}\right).\cos\left(b\sqrt{-1}\right).$$

Ces formules, comme toutes les formules de Trigonométrie plane qui en découlent, coïncident complètement avec les formules de la Trigonométrie sphérique, à cela près que si, par exemple, les côtés et les angles d'un Δ rectiligne rectangle sont désignés par les mêmes lettres que ceux d'un Δ sphérique rectangle, les côtés du Δ rectiligne devront être divisés par $\sqrt{-1}$ pour que l'on obtienne les formules relatives au Δ sphérique.

Il vient ainsi, pour un Δ sphérique,

par I, $\quad 1 : \sin \alpha = \sin c : \sin a;$

par II, $\quad 1 : \cos a = \sin \beta : \cos \alpha;$

par III, $\quad \cos c = \cos a \cos b.$

Le lecteur pouvant se trouver arrêté par l'omission d'une démonstration (p. 233), il ne sera pas inutile de faire voir, par exemple, comment de l'équation

$$e^{\frac{c}{i}} + e^{-\frac{c}{i}} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{a}{i}} + e^{-\frac{a}{i}}\right)\left(e^{\frac{b}{i}} + e^{-\frac{b}{i}}\right)$$

on déduit la formule

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

ou le théorème de Pythagore pour le système euclidien. C'est pro-

bablement ainsi que l'auteur y est parvenu, et les autres conséquences s'en tirent d'une manière analogue.

On a, par la formule connue,

$$e^{\frac{k}{i}} = 1 + \frac{k}{i} + \frac{k^2}{2i^2} + \frac{k^3}{2.3.i^3} + \frac{k^4}{2.3.4.i^4} + \cdots,$$

$$e^{-\frac{k}{i}} = 1 - \frac{k}{i} + \frac{k^2}{2i^2} - \frac{k^3}{2.3.i^3} + \frac{k^4}{2.3.4.i^4} - \cdots,$$

et par suite

$$e^{\frac{k}{i}} + e^{-\frac{k}{i}} = +2\,\frac{k^2}{i^2} + \frac{k^4}{3.4\,i^4} + \cdots = 2 + \frac{k^2 + u}{i^2},$$

en désignant par $\frac{u}{i^2}$ la somme de tous les termes qui suivent $\frac{k^2}{i^2}$; et l'on a $u \to 0$, lorsque $i \to \infty$. Car tous les termes qui suivent $\frac{k^2}{i^2}$ étant divisés par i^2, le premier de ces termes sera $\frac{k^4}{3.4.i^2}$; et comme le rapport d'un terme au précédent est partout $< \frac{k^2}{i^2}$, la somme est moindre qu'elle ne serait, si ce rapport était $= \frac{k^2}{i^4}$, c'est-à-dire moindre que

$$\frac{k^4}{3.4.i^2} : \left(1 - \frac{k^2}{i^2}\right) = \frac{k^4}{3.4\,(i^2 - k^2)},$$

quantité qui évidemment $\to 0$ lorsque $i \to \infty$. De l'équation

$$e^{\frac{c}{i}} + e^{-\frac{c}{i}} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{a+b}{i}} + e^{-\frac{a+b}{i}} + e^{\frac{a-b}{i}} + e^{-\frac{a-b}{i}}\right)$$

il résulte (en appelant w, v, λ des quantités analogues à u)

$$2 + \frac{c^2 + w}{i^2} = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{(a+b)^2 + v}{i^2} + 2 + \frac{(a-b)^2 + \lambda}{i^2}\right),$$

d'où

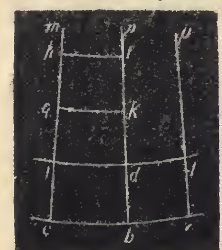
$$c^2 = \frac{a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2 + v + \lambda - w}{2},$$

quantité qui $\to a^2 + b^2$.

REMARQUE. — Le rayon de la sphère dans laquelle le sinus total $1 = i$ est l'ordonnée y d'une ligne L, égale à $i = 1$ et menée par une des extrémités de L perpendiculairement à l'axe passant par l'autre extrémité. Car, dans la surface appelée F (§ 21), *toute la Géométrie euclidienne a lieu, les lignes L jouant le rôle des lignes droites;* et pour un rayon de forme L égal à 1, lequel sera le sinus total dans F, le rayon de la même circonférence dans son plan sera le y en question; ce qui s'applique facilement à la sphère imaginaire à laquelle le plan se ramène dans le système anti-euclidien.

(*Kurzer Grundriss u. v. w.*, p. 82).

Lobatschewsky et l'Auteur de l'*Appendix* considèrent l'un et l'autre deux points a, b de la sphère-limite et les axes correspondants $\overrightarrow{am}$, $\overrightarrow{bn}$ (§ 23). Ils démontrent que, si α, β, γ désignent les arcs de cercle-limite ab, cd, hl, séparés par les segments d'axe $ac = 1$, $ah = x$, on a



$$\frac{\alpha}{\gamma} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x .$$

Lobatschwesky représente la valeur de $\frac{\gamma}{\alpha}$ par e^{-x}, e ayant une valeur quelconque > 1, dépendante de l'unité de longueur qu'on a choisie, et pouvant être supposée égale à la base népérienne.

L'auteur de l'*Appendix* est conduit directement à introduire la base des logarithmes naturels. Si l'on pose $\frac{\alpha}{\beta} = \delta$, et que γ, γ' soient des arcs situés aux distances y, i de α, on aura

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \delta^y = Y, \qquad \frac{\alpha}{\gamma'} = \delta^i = I,$$

d'où

$$Y = I^{\frac{y}{i}} .$$

Il démontre ensuite (§ 29) que, si u est l'angle que fait une droite

avec la perpendiculaire y à sa parallèle, on a

$$Y = \cot \tfrac{1}{2} u.$$

Si l'on pose donc $z = \frac{\pi}{2} - u$, il viendra

$$Y = \operatorname{tang}\left(z + \tfrac{1}{2} u\right) = \frac{\operatorname{tang} z + \operatorname{tang} \frac{1}{2} u}{1 - \operatorname{tang} z \operatorname{tang} \frac{1}{2} u},$$

d'où l'on tire, en ayant égard à la valeur de $\operatorname{tang} \frac{1}{2} u = Y^{-1}$,

$$\operatorname{tang} z = \tfrac{1}{2}(Y - Y^{-1}) = \tfrac{1}{2}\left(I^{\frac{y}{i}} - I^{-\frac{y}{i}}\right) \text{ (§ 30)}.$$

Si maintenant y est la demi-corde de l'arc de cercle-limite $2r$, on prouve (§ 30) que $\frac{r}{\operatorname{tang} z} =$ constante. En représentant par i cette constante, et faisant tendre y vers zéro, on aura $\frac{2r}{2y} \sim 1$, d'où

$$2y \sim 2i \operatorname{tang} z \sim i \frac{I^{\frac{2y}{i}} - 1}{I^{\frac{y}{i}}},$$

ou en posant $\frac{2y}{i} = k$, $I = e^{l}$,

$$k I^{\frac{y}{i}} \sim e^{kl} - 1 \sim kl(1 + \omega),$$

ω étant infiniment petit en même temps que k. Donc, à la limite, $1 = l$, et par suite $I = e$.

La circonférence tracée sur la sphère-limite avec l'arc r de courbe-limite pour rayon, a pour longueur $2\pi r$. Donc

$$\bigcirc y = 2\pi r = 2\pi i \operatorname{tang} z = \pi i (Y - Y^{-1}).$$

Dans le $\triangle$ rectiligne où α, β désignent les angles opposés aux côtés a, b, on a (§ 25)

$$\sin\alpha : \sin\beta = \bigcirc a : \bigcirc b = \pi i (A - A^{-1}) : \pi i (B - B^{-1})$$
$$= \sin\left(a\sqrt{-1}\right) : \sin\left(b\sqrt{-1}\right).$$

Ainsi dans la Trigonométrie plane comme dans la Trigonométrie

sphérique, les sinus des angles sont entre eux comme les sinus des côtés opposés, si ce n'est que, sur la sphère, les côtés sont réels, et que dans le plan on doit les considérer comme imaginaires, de même que si le plan était une sphère imaginaire.

On peut arriver à cette proposition sans avoir déterminé préalablement la valeur de I. Si l'on désigne, en effet, la constante $\frac{r}{\tang z}$ par q, on aura, comme précédemment,

$$\bigcirc y = \pi q (Y - Y^{-1}),$$

d'où l'on déduit la même proportion que ci-dessus, en prenant pour i la distance pour laquelle le rapport I est égal à e.

Si l'axiôme XI n'est pas vrai, il existe un i déterminé, qu'il faut substituer dans les formules. Si, au contraire, cet axiôme est vrai, il faudra faire dans les formules $i = \infty$. Car, dans ce cas, la quantité $\frac{\alpha}{\gamma} = Y$ est toujours $= 1$, la sphère-limite étant un plan, et les axes étant des parallèles dans le sens d'Euclide. L'exposant $\frac{y}{i}$ doit donc être nul, et par suite $i = \infty$.

Il est facile de voir que nos formules de Trigonométrie plane s'accordent avec celles de Lobatschewsky. Prenons, par exemple la formule de l'art. 37, p. 116,

$$\tang \Pi(a) = \sin B \tang \Pi(p),$$

a étant l'hypoténuse d'un Δ rectangle, p un côté de l'angle droit, et B l'angle opposé à ce côté. Notre formule du § 31, I, donne

$$1 : \sin B = (A - A^{-1}) : (P - P^{-1}).$$

Or, en faisant, pour abréger, $\frac{1}{2}\Pi(k) = k'$, on a

$$\begin{aligned} \tang 2p' : \tang 2a' &= (\cot a' - \tang a') : (\cot p' - \tang p') \\ &= (A - A^{-1}) : (P - P^{-1}) \\ &= 1 : \sin B. \end{aligned}$$

